

*Hiperbolicidad e implementación del método WENO
espectral con multiresolución adaptativa para el modelo
tráfico de Lighthill-Whitham-Richards*

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

*Hiperbolicidad e implementación del método WENO espectral con
multiresolución adaptativa para el modelo tráfico multiclase de
Lighthill-Whitham-Richards*

Edwin Alberto Bolaño Benitez

*Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en
Matemáticas*

Director: Dr. Carlos Arturo Vega Fuentes

Barranquilla, mayo de 2014

AGRADECIMIENTOS

Muy agradecido de todos los profesores , Jorge Robinson, Ismael Gutierrez, Jairo Hernandez, Bienvenido Barraza, Agustin Barrios, Ricardo Prato y Catalina Dominguez, por guiarme y transmitirme sus conocimientos. En especial, le doy gracias a un excelente ser humano, mi tutor de tesis el profesor Carlos Vega por haberme brindado su orientación y la colaboración necesaria para la realización de este trabajo. También y a pesar de no ser mi profesor durante la maestría no puedo dejar de mencionar y de estar muy agradecido por su gran apoyo y ayuda, el profesor Guillermo Cervantes.

A los que al mismo tiempo son mis compañeros, colegas y amigos, Ivan , Francisco, Anselmo , Darling , Yesneri y Heidy que estuvieron conmigo en este camino.

Finalmente deseo expresarles mis agradecimientos por el apoyo de Colciencias mediante el proyecto identificado con el código 121556933836 y a la Dirección de Investigación , Desarrollo e Investigación (DIDI) de la Universidad del Norte.

A todos gracias...

Dedicado a Dios, a mis padres, Enrique y Etilsa; hermanos, Surgey y Eduar; sobrinas, las que amo como mis hijas, Andrea, Mary y Salomé. A ellos que son el motor de mi ser, les dedico todos mis triunfos.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
2. Análisis del caracter hiperbólico del modelo multiclase de Lighthill-Whitham-Richards (MCLWR)	11
2.1. Descripción del modelo	11
2.2. Información característica	18
3. Esquemas numéricos	23
3.1. Aproximación WENO.	23
3.2. Métodos Adaptativos de Multirresolución	28
4. Experimentos numéricos	37
Conclusión	43
Bibliografía	44

Índice de figuras

3.1.	Esténciles asociados a los flujos $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^+$ y $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^-$	27
3.2.	Diferentes escalas de promedios de celdas	29
4.1.	La primera y segunda columna muestran la solución numérica para cada especie, la concentración total y los coeficientes significativos para $t=0.005$ y $t=0.010$, respectivamente.	40
4.2.	La primera y segunda columna muestran la solución numérica para cada especie, la concentración total y los coeficientes significativos para $t=0.020$ y $t=0.04$, respectivamente.	41

Introducción

En este trabajo se considera el estudio de hiperbolicidad y simulaciones numéricas con un método de alto orden adaptativo para el modelo multiclase o multiespecie de Lighthill-Whitham-Richards (MCLWR) [32], [3]. Este modelo es descrito por un sistema unidimensional y no lineal de leyes de conservación

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \partial_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\rho}) = 0 \quad (0.0.1)$$

donde t es la variable temporal, x la variable espacial, $\boldsymbol{\rho}$ el vector de densidades y \boldsymbol{f} la función de flujo, donde cada componente de la función de flujo depende solamente de las densidades, esto es,

$$f_i = \rho_i v_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (0.0.2)$$

donde v_i es la velocidad de cada especie.

A diferencia de otros modelos clásicos descritos por otros sistemas de leyes de conservación para el modelo MCLWR no existen expresiones cerradas para los valores y vectores propios, esta información característica es fundamental para la implementación de esquemas espectrales de alto orden tipo WENO, puesto que la implementación por componentes (es decir, sin usar la información característica completa) usualmente produce oscilaciones al rededor de las discontinuidades

debido a la interacción de los diferentes campos característicos. La hiperbolicidad del sistema (0.0.1), (0.0.2) ha sido estudiado por muchos investigadores: En la referencia [3] se demostró la hiperbolicidad del modelo de tráfico vehicular MCLWR mostrando que el sistema es simetrizable y construyendo explícitamente un par de entropía para tal sistema, aquí se retoma tal resultado desarrollando completamente todos los cálculos. La existencia de pares de entropía es fundamental para la construcción de esquemas estables de entropía [31]. Más recientemente Donat y Mulet [11], [12] realizaron un análisis para la hiperbolicidad del modelo de tráfico vehicular MCLWR proveyendo la información característica completa, la cual como se ha mencionado antes es una información esencial para la implementación de esquemas espectrales de alto orden. Estas últimas referencias incluyen también simulaciones numéricas con el método WENO usando la técnica de refinamiento con mallas adaptativas introducida por Berger y Oliger [4].

En este trabajo se implementa el esquema WENO espectral de quinto orden pero usando el enfoque de Harten [18],[19] y [20], el cual permite reducir en forma significativa las evaluaciones de flujo (donde se concentra gran parte el costo computacional para métodos de alto orden).

El trabajo se organiza de la siguiente manera: En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos de los sistemas de leyes de conservación, en el capítulo 2 se muestra un análisis del modelo de tráfico vehicular MCLWR, el tercer capítulo describe el método WENO incorporando la información característica, además se da una breve descripción del algoritmo de multirresolución y en el cuarto capítulo se hace una implementación numérica con un ejemplo estándar aplicando la teoría dada. Por último, damos nuestras conclusiones.

Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones básicas relativas a sistemas de leyes de conservación, además se dan algunos resultados conocidos con sus respectivas pruebas que permiten hacer el estudio del caracter hiperbólico de sistemas de leyes de conservación, se incluye en particular un resultado de álgebra lineal que serán muy útil para analizar la hiperbolicidad del modelo de tráfico vehicular considerado en este trabajo.

Definición 1.0.1 Un sistema de leyes de conservación de primer orden y unidimensional en la variable espacial es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \partial_x \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[\quad (1.0.1)$$

donde $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty[\rightarrow \Omega$ es el vector de incógnitas y $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ es la función de flujo, la cual en general es no lineal. Aquí Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^M . Junto con la ecuación (1.0.1) consideraremos un dato inicial

$$\boldsymbol{\rho}(x, 0) = \boldsymbol{\rho}_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.0.2)$$

Definición 1.0.2 Una **solución clásica** del problema de Cauchy (1.0.1)-(1.0.2) es una función $\boldsymbol{\rho}$ de clase C^1 que satisface dicho sistema puntualmente.

Es bien conocido que, independientemente de la regularidad del dato inicial $\rho_0(x)$, el problema (1.0.1)-(1.0.2) no tiene soluciones clásicas para todo $t > 0$. Por lo tanto, es necesario considerar soluciones en un sentido débil o soluciones distribucionales.

Definición 1.0.3 Una función $\rho \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ es una **solución débil** del problema de Cauchy (1.0.1)-(1.0.2) si

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{[0, \infty[} [\rho(x, t) \cdot \phi_t(x, t) + \mathbf{f}(\rho(x, t)) \cdot \phi_x(x, t)] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) \cdot \phi(x, 0) dx = 0 \quad (1.0.3)$$

para toda función test $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$.

Las soluciones débiles para un sistema de leyes de conservación no necesariamente son únicas, en consecuencia, para obtener unicidad se requiere una condición adicional o criterio de admisibilidad, usualmente llamada *condiciones de entropía*, para seleccionar una solución que sea físicamente relevante.

Definición 1.0.4 Sean $E : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ y $Q : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^2 con E convexa. Se dice que E es una función de entropía para el sistema (1.0.1) si

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\rho) = \partial_\rho Q(\rho), \quad (1.0.4)$$

donde $\mathbf{v}^\top = \partial_\rho E(\rho)$ son las variables de entropía y $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\rho)$ la matriz Jacobiana de la función de flujo, esto es,

$$\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\rho) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \right)_{1 \leq i, j \leq M}$$

La función Q es llamada función flujo de entropía asociada a E y (E, Q) es llamado un par de entropía para la ecuación (1.0.1).

Una consecuencia de la ecuación (1.0.4) es que las soluciones suaves de (1.0.1) satisfacen la identidad de entropía

$$\partial_t E(\rho) + \partial_x Q(\rho) = 0. \quad (1.0.5)$$

Sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, las soluciones de (1.0.1) son, en general, discontinuas. Luego, la identidad (1.0.5) se reemplaza por la desigualdad (en el sentido de distribuciones):

$$\partial_t E(\boldsymbol{\rho}) + \partial_x Q(\boldsymbol{\rho}) \leq 0. \quad (1.0.6)$$

Mas formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 1.0.5 Una solución débil $\boldsymbol{\rho}$ de problema (1.0.1)-(1.0.2) con $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[$ se llama una **solución de entropía** si para todo par de entropía (E, Q) y toda función no negativa $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ se cumple que:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [E(\boldsymbol{\rho}) \phi_t + Q(\boldsymbol{\rho}) \phi_x] dx dt + \int_{\mathbb{R}} E(\boldsymbol{\rho}_0(x)) \phi(x, 0) dx \geq 0. \quad (1.0.7)$$

Observación 1.0.1 Las leyes de conservación escalares unidimensionales poseen infinitas funciones de entropía, de hecho, para cualquier función convexa E , (E, Q) es un par de entropía con

$$Q(\sigma) = \int_o^\sigma E'(\tau) \mathbf{f}'(\tau) d\tau. \quad (1.0.8)$$

Tal riqueza en pares de entropía para el caso escalar facilita el estudio del problema de existencia y unicidad. Infortunadamente, en general, para los sistemas de leyes de conservación no siempre es una tarea sencilla hallar funciones de entropía.

A continuación se definen los sistemas hiperbólicos, la hiperbolicidad es un concepto fundamental en el contexto de leyes de conservación tanto desde el punto de vista teórico como numérico. De hecho para algunos modelos de flujo cinemáticos, la perdida de hiperbolicidad está relacionada con fenómenos de inestabilidad (ver [6]).

Definición 1.0.6 El sistema de leyes de conservación (1.0.1) es llamado **hiperbólico**, si la matriz Jacobiana $J_{\rho}f(\rho)$ es diagonalizable con valores propios reales. Estos lo denotamos como

$$\lambda_1(\rho) \leq \dots \leq \lambda_M(\rho).$$

Si los valores propios son, además, todos distintos, entonces decimos que el sistema es **estrictamente hiperbólico**. Los valores propios $\lambda_j(\rho)$ de un sistema hiperbólico son llamados también velocidades características.

Dado que el tamaño de la matriz Jacobiana puede ser arbitrariamente grande el estudio directo de los valores propios a través del polinomio característico puede resultar un procedimiento dispendioso y computacionalmente costoso. El siguiente resultado relaciona los conceptos de entropía e hiperbolicidad y se usará para una de las pruebas de hiperbolicidad del modelo de tráfico vehicular cuya descripción se presenta en el siguiente capítulo.

Lemma 1.0.1 [15, 25]. Si el sistema conservativo (1.0.1) tiene una entropía estrictamente convexa, entonces dicho sistema es hiperbólico.

Demostración:

Suponga que el sistema tiene una entropía estrictamente convexa E con flujo de entropía Q , es decir,

$$\partial_{\rho}E(\rho)J_{\rho}f(\rho) = \partial_{\rho}Q(\rho) \quad (1.0.9)$$

Como E es estrictamente convexa entonces su matriz Hessiana $\partial_{\rho}^2E(\rho)$ es simétrica y definida positiva.

De (1.0.9)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \frac{\partial E}{\partial \rho_i} = \frac{\partial Q}{\partial \rho_j} \quad j = 1, \dots, n.$$

Diferenciando con respecto a ρ_k , $k = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_k \partial \rho_i} \frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial \rho_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \rho_k \partial \rho_j} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \rho_k \partial \rho_i}$$

o bien,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \rho_k \partial \rho_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial \rho_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial \rho_k \partial \rho_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_k \partial \rho_i} \frac{\partial f_i}{\partial \rho_j}.$$

Puesto que el lado izquierdo es simétrico en j y k entonces lo mismo vale para el lado derecho, por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_j \partial \rho_i} \frac{\partial f_i}{\partial \rho_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_k \partial \rho_j} \frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \quad j, k = 1, \dots, n,$$

es decir, $\partial_\rho^2 E(\rho) \mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\rho)$ es simétrica.

Ahora se definen

$$\mathbf{Z} := \partial_\rho^2 E \quad \text{y} \quad \mathbf{H} := \mathbf{Z} \mathbf{J}_\rho \mathbf{f}.$$

Dado que \mathbf{Z} es definida positiva y simétrica, entonces existe una única matriz $\mathbf{Z}^{\frac{1}{2}}$ definida positiva y además simétrica, tal que $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}}$. Puesto que \mathbf{H} , $\mathbf{Z}^{\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}}$ son simétricas, también lo es la matriz $\mathbf{A} := \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}} \mathbf{J}_\rho \mathbf{f} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}}$.

Debido que toda matriz simétrica es diagonalizable, existe una matriz \mathbf{B} invertible y una matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$ tal que $\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{\Lambda}$, por lo tanto

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{B} \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}} \mathbf{J}_\rho \mathbf{f} \mathbf{Z}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{B} \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}}) \mathbf{J}_\rho \mathbf{f} (\mathbf{B} \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}})^{-1},$$

es decir, $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}$ es diagonalizable.

Por otro lado, como \mathbf{Z} es definida positiva y simétrica, tenemos que

$$\mathbf{w}^T \mathbf{Z} \mathbf{w} > 0, \quad \text{para todo } \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{w} \neq 0.$$

Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^M$ un vector propio de $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}$ con valor propio asociado $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\mathbf{J}_\rho \mathbf{f} \mathbf{w} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}$$

o bien,

$$\mathbf{H} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{Z} \mathbf{w}$$

Tomando $r := \mathbf{w}^T \mathbf{Z} \mathbf{w} > 0$, resulta

$$\lambda r = \mathbf{w}^T (\lambda \mathbf{Z} \mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \mathbf{H} \mathbf{w} = (\mathbf{H} \mathbf{w})^T \mathbf{w} = (\lambda \mathbf{Z} \mathbf{w})^T \mathbf{w} = \overline{\lambda} (\mathbf{w}^T \mathbf{Z} \mathbf{w}) = \overline{\lambda} r.$$

Por lo tanto, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hemos mostrado que $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}$ es diagonalizable y que sus valores propios son reales, por lo tanto, el sistema es hiperbólico. \square

Definición 1.0.7 Se dice que el sistema de leyes de conservación unidimensional

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \partial_x \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = 0$$

es “*simetrizable*” si para cada $\boldsymbol{\rho} \in \Omega$ existe una matriz simétrica definida positiva $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\rho})$ tal que $\mathbf{Z} \mathbf{J}_\rho \mathbf{f}$ es simétrica.

Corolario 1.0.1 Si el sistema de leyes de conservación es simetrizable, entonces es hiperbólico.

Finalizamos estos preliminares matemáticos con un resultado del álgebra lineal que permite reducir el análisis de los valores propios de matrices que son perturbaciones de rango uno de una matriz diagonal, al estudio de las raíces de una ecuación racional que usualmente recibe el nombre de ecuación secular. Este resultado fue probado por Golub [17] para el caso de perturbaciones de rango uno autoadjuntas de una matriz diagonal. Un resultado más general se puede encontrar en las referencias [1] y [11] para el caso de perturbaciones de rango arbitrario m de una matriz diagonal.

Teorema 1.0.1 [La ecuación secular] Suponga que $\mathbf{D} = \text{diag}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ es una matriz diagonal real tal que $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ y $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Sea $\lambda \neq u_i$ para $i = 1, \dots, n$. Entonces λ es un valor propio de la matriz $\mathbf{D} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top$ si, y sólo si

$$S(\lambda) := 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{u_i - \lambda} = 0, \quad (1.0.10)$$

donde $\gamma_i = a_i b_i$, $i = 1, \dots, n$.

Demostración:

La prueba se sigue fácilmente de la igualdad $\det(\mathbf{C} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top) = \det(\mathbf{C})(1 + \mathbf{b}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a})$ si \mathbf{C} es cualquier matriz invertible. En efecto, teniendo en cuenta que $\lambda \neq u_i$ para $i = 1, \dots, n$, entonces el polinomio caraterístico de $\mathbf{D} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det((\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}) + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top) \\ &= \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})(1 + \mathbf{b}^\top (\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}) \\ &= \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}) \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{u_i - \lambda} \right), \end{aligned}$$

esto es,

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}) S(\lambda). \quad (1.0.11)$$

Puesto que $\lambda \neq u_i$ para $i = 1, \dots, n$, de la ecuación (1.0.11) se obtiene el resultado deseado. \square

Capítulo 2

Análisis del caracter hiperbólico del modelo multiclase de Lighthill-Whitham-Richards (MCLWR)

2.1. Descripción del modelo

En este capítulo se aborda el análisis del carácter hiperbólico de un modelo de tráfico vehicular, a saber, el modelo con múltiples clases o especies de Lighthill-Whitham-Richards (MCLWR) el cual fue propuesto independientemente por los autores Wong y Wong [32] y Benzoni-Gavage y Colombo [2]. Dicho modelo constituye una extensión del famoso modelo continuo de flujo de tráfico (unidimensional) desarrollado por Lighthill-Whitham-Richards (LWR). El modelo original de LWR es descrito por una sola ley de conservación escalar

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v(\rho)) = 0,$$

siendo $\rho(x, t)$ la densidad de vehículos (vehículos por milla) donde la función velocidad v es no negativa y $v'(\rho) < 0$. Una primera falencia de éste modelo es que supone que todos los conductores responden en forma homogénea a un evento determinado. La extensión a varias especies (modelo MCLWR) es más realista al considerar el comportamiento heterogéneo de los diferentes conductores y es descrito por un sistema de leyes de conservación no lineal y unidimensional

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \partial_x \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad (2.1.1)$$

donde $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(x, t) = (\rho_1, \dots, \rho_M)^\top$ es el vector de densidad, es decir, para cada $i = 1, \dots, M$, ρ_i es la densidad de vehículos que pertenece a la clase o especie i y $\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = (f_1(\boldsymbol{\rho}), \dots, f_M(\boldsymbol{\rho}))^\top$ es el vector de flujo. Bajo el supuesto de que los conductores de cada clase ajustan su velocidad a la densidad total $r = \rho_1 + \dots + \rho_M$, es decir, $v_i(\boldsymbol{\rho}) = u_i(r)\rho_i$ para $i = 1, \dots, M$, la función de flujo adquiere la forma

$$f_i(\boldsymbol{\rho}) = \rho_i u_i(r), \quad i = 1, \dots, M, \quad (2.1.2)$$

con

$$u_i(r) = \beta_i \phi(r), \quad i = 1, \dots, M.$$

Aquí, β_i es la velocidad máxima alcanzada por los vehículos en la clase i con $0 < \beta_1 < \dots < \beta_M$ y $\phi(r)$ es una función (que no se anula en ningún punto) que describe el comportamiento de los conductores. Algunas expresiones estándar para ϕ vienen dadas por

$$\phi(r) = 1 - \frac{r}{r_{\max}} \quad (\text{Greenshield}), \quad (2.1.3)$$

$$\phi(r) = \exp\left(-\frac{1}{2}(r/r^*)^2\right) \quad (\text{Drake}). \quad (2.1.4)$$

El espacio de fase para (2.1.1) es

$$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_M)^\top \in \mathbb{R}^M : \rho_1 \geq 0, \dots, \rho_M \geq 0, r = \sum_{i=1}^M \rho_i \leq r_{\max}\}, \quad (2.1.5)$$

donde $r_{\text{máx}}$ es la densidad máxima de vehículos.

De un cálculo directo de la matriz Jacobiana $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\rho) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \right)_{1 \leq i, j \leq M}$ a partir de (2.1.2), se obtiene

$$\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} = \begin{cases} u_i(r) + \rho_i u'_i(r), & \text{si } i = j, \\ \rho_i u'_i(r), & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\rho) = \text{diag}(u_i(r)) + \mathbf{a} \mathbf{b}^\top$$

Con

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \rho_1 u'_1(r) \\ \vdots \\ \rho_M u'_M(r) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1.6)$$

es decir, $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\rho)$ es una perturbación de rango uno de la matriz diagonal cuyas entradas son las velocidades de las especies. Luego, del Teorema 1.0.1 con

$$\gamma_i := a_i b_i = \rho_i u'_i(r) \quad (2.1.7)$$

resulta que si $\rho_i > 0$, el problema de caracterizar y hallar los valores propios de la matriz Jacobiana del modelo MCLWR se reduce a estudiar las raíces de la ecuación secular

$$S(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{u_i - \lambda}$$

con γ_i dado por (2.1.7).

Más aun, puesto que las velocidades son funciones decrecientes con respecto a la concentración total (esto es, $u'(r) < 0$), se sigue que $\gamma_i < 0$ si $\rho_i > 0$. Luego, $\lim_{\lambda \rightarrow u_i^\pm} S(\lambda) = \pm\infty$ y $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} S(\lambda) = 1$. En consecuencia la ecuación secular $S(\lambda) = 0$ tiene M raíces reales distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ con

$$\lambda_1 < u_1 < \lambda_2 < u_2 < \dots < \lambda_M < u_M.$$

Esta propiedad se le conoce como propiedad de entrelazamiento.

Para completar las cotas que permiten localizar las raíces de la ecuación secular resta hallar una cota inferior para λ_1 y para esto será suficiente hallar $K_1 < u_1$ tal que $S(K_1) \geq 0$. En efecto, tomando

$$K_1 := u_1 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_M,$$

tenemos que

$$K_1 - u_i = (u_1 - u_i) + \sum_{i=1}^M \gamma_i \leq \sum_{i=1}^M \gamma_i$$

y así,

$$u_i - K_1 \geq - \sum_{i=1}^M \gamma_i > 0$$

En consecuencia,

$$\frac{\gamma_i}{u_i - K_1} \geq \frac{\gamma_i}{-\sum_{i=1}^M \gamma_i} \quad i = 1, \dots, M$$

y con eso

$$\sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{u_i - K_1} \geq - \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{\sum_{i=1}^M \gamma_i} \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$S(K_1) = 1 + \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{u_i - K_1} \geq 1 - \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{\sum_{i=1}^M \gamma_i} \geq 0.$$

Se ha probado el siguiente resultado.

Teorema 2.1.1 Si $\rho_i > 0$, $i = 1, \dots, M$, entonces el sistema (2.1.1), (2.1.2) es estrictamente hiperbólico. Más aún, los valores propios satisfacen la siguiente propiedad de entrelazamiento

$$K_1 := u_1 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_M < \lambda_1 < u_1 < \cdots < u_{M-1} < \lambda_M < u_M.$$

Observación 2.1.1 El teorema previo da condiciones suficientes para la hiperbolicidad estricta, sin embargo, hay subregiones del dominio para las cuales las densidades pueden ser ceros y el sistema es estrictamente hiperbólico como se indica en la **Proposición 1** de [12].

Observación 2.1.2 Desde el punto de vista numérico la relevancia de la propiedad de entrelazamiento radica en que facilita el cálculo de los valores propios, información que es vital para la implementación de los esquemas numéricos.

Observación 2.1.3 Varios autores han estudiado el caracter hiperbólico de este modelo, empleando diferentes enfoques. Aquí hemos usado el enfoque de Donat y Mulet [11, 12] para obtener la hiperbolicidad del modelo de tráfico vehicular MCLWR. En [33] obtuvieron una expresión explícita del polinomio característico de $J_\rho f$ y probaron existencia de M valores propios reales usando una propiedad de entrelazamiento. En [2], los autores demostraron que si las densidades son estrictamente positivas, el sistema (2.1.1) es simetrizable y por tanto hiperbólico. A continuación presentaremos los detalles de los cálculos de ésta última referencia debido a que se obtiene un par de entropía para el modelo. Una consecuencia importante de disponer de un par de entropía es que dicha información puede usarse para la construcción de esquemas conservativos de entropía, actualmente hay una corriente muy activa en esta línea de investigación, ver por ejemplo referencias recientes [13, 14, 31].

Dado que $u_i(r) = \phi\beta_i$, para $i = 1, \dots, M$, entonces

$$J_\rho f(\rho) = \phi(r) \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_M \end{pmatrix} + \phi'(r) \begin{pmatrix} \rho_1\beta_1 & \cdots & \rho_1\beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_M\beta_M & \cdots & \rho_M\beta_M \end{pmatrix}. \quad (2.1.8)$$

Para que la matriz Hessiana sea diagonal, la entropía tiene que ser de la forma

$$E(\boldsymbol{\rho}) = e_1(\rho_1) + \dots + e_M(\rho_M),$$

donde e_i son funciones por determinar.

Luego

$$\partial_{\boldsymbol{\rho}}^2 E = \text{diag}(e_i''(\rho_i)).$$

Si tomamos a $\rho_1 > 0, \dots, \rho_M > 0$ se tendría que

$$(\partial_{\boldsymbol{\rho}}^2 E \mathbf{J}_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f})_{ij} = (\partial_{\boldsymbol{\rho}}^2 E \mathbf{J}_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f})_{ji}.$$

Entonces

$$e_i''(\rho_i) \phi'(r) \rho_i \beta_i = e_j''(\rho_j) \phi'(r) \rho_j \beta_j, \quad i = 1, \dots, M.$$

Así

$$e_i''(\rho_i) \rho_i \beta_i = e_j''(\rho_j) \rho_j \beta_j = k, \quad k = \text{constante}.$$

En consecuencia

$$e_i''(\rho_i) = \frac{1}{\rho_i \beta_i} \quad i = 1, \dots, M.$$

Integrando con respecto a ρ_i

$$e_i'(\rho_i) = \frac{1}{\beta_i} \ln \rho_i \quad i = 1, \dots, M.$$

Así nuevamente se obtiene

$$e_i(\rho_i) = \frac{1}{\beta_i} \int \ln \rho_i d\rho_i = \frac{1}{\beta_i} \rho_i (\ln \rho_i - 1) \quad i = 1, \dots, M.$$

De esta forma se obtiene una función de entropía para la ley de conservación

(2.1.1) la cual viene dada por

$$E(\rho_1, \dots, \rho_M) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{\beta_i} \rho_i (\ln \rho_i - 1). \quad (2.1.9)$$

Por otra parte, utilizando la relación $\partial_\rho Q = \partial_\rho E \mathbf{J}_\rho \mathbf{f}$ podemos hallar fácilmente el flujo de entropía asociado a E

$$\begin{aligned} \partial_\rho E \mathbf{J}_\rho \mathbf{f} &= (e'_1(\rho_1), \dots, e'_M(\rho_M)) \begin{pmatrix} \phi\beta_1 + \phi'\rho_1\beta_1 & \cdots & \phi'\rho_1\beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi'\rho_M\beta_M & \cdots & \phi\beta_M + \phi'\rho_M\beta_M \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial \rho_M} \right). \end{aligned}$$

Dado que $e'_i(\rho_i) = \frac{1}{\beta_i} \ln(\rho_i)$, $i = 1, \dots, M$, resulta

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho_i} = \phi' \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} \rho_j \ln(\rho_j) + \ln(\rho_i)(\phi + \phi'\rho_i), \quad i = 1, \dots, M.$$

Integrando con respecto a ρ_i ,

$$Q(\rho_1, \dots, \rho_M) = \phi \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} \rho_j \ln(\rho_j) + \int \phi \ln(\rho_i) d\rho_i + \int \phi' \rho_i \ln(\rho_i) d\rho_i.$$

Ahora integrando por partes la segunda integral, se obtiene

$$\begin{aligned} Q(\rho_1, \dots, \rho_M) &= \phi \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} \rho_j \ln(\rho_j) + \int \phi \ln(\rho_i) d\rho_i + \phi \rho_i \ln(\rho_i) \\ &\quad - \int \phi d\rho_i - \int \phi \ln(\rho_i) d\rho_i \\ &= \phi \sum_{j=1}^M \rho_j \ln(\rho_j) - \int \phi d\rho_i. \end{aligned}$$

Luego,

$$Q(\rho_1, \dots, \rho_M) = \phi(r) \sum_{j=1}^M \rho_j \ln(\rho_j) - \Phi(r), \quad (2.1.10)$$

donde Φ es una primitiva de ϕ .

Así, se obtiene el par de entropía propuesto por Benzoni-Gavage y Colombo en [2]:

$$E(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{\beta_i} \rho_i (\ln \rho_i - 1), \quad (2.1.11)$$

$$Q(\boldsymbol{\rho}) = \phi(r) \sum_{j=1}^M \rho_j \ln(\rho_j) - \Phi(r), \quad (2.1.12)$$

donde Φ es una primitiva de ϕ .

Note que la matriz Hessiana de E es definida positiva, por lo tanto, E es estrictamente convexa, luego por el Lema 1.0.1 el sistema de leyes de conservación (2.1.1), (2.1.2) es hiperbólico. Este es un camino alternativo de probar la hiperbolicidad del modelo, bajo el supuesto que las densidades son estrictamente positivas.

Nota 2.1.1 [3]. Más recientemente estos mismos autores proponen la siguiente variación.

$$E(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^M \frac{(1/(Me)) + \rho_M^i \ln(M\rho_M^i)}{\beta_M^i}, \quad (2.1.13)$$

$$Q(\boldsymbol{\rho}) = \phi \left(\sum_{i=1}^M \rho_M^i \right) \sum_{i=1}^M \rho_M^i (1 + \ln(M\rho_M^i)) - \Phi \left(\sum_{i=1}^M \rho_M^i \right) \quad (2.1.14)$$

con Φ una primitiva de ϕ .

2.2. Información característica

El resto de la información característica asociada a la matriz Jacobiana del modelo MCLWR necesaria para la implementación de los esquemas numéricos se calcula como sigue. Se incluyen en los cálculos los casos en que algún ρ_i es cero.

Sea $\Lambda := \{q : a_q = 0\}$, donde \mathbf{a} está dada por (2.1.6), la estructura de los vectores propios de $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}$ es la siguiente: Para $q \in \Lambda$, u_q es un valor propio, con los correspondientes vectores propios a izquierda y a derecha normalizados \mathbf{l} y \mathbf{r} ,

dados por

$$l_i = \delta_{q,i}, \quad r_i = \begin{cases} \frac{a_i}{S(u_q)(u_q - u_i)}, & \text{si } i \neq q, \\ 1, & \text{si } i = q. \end{cases}$$

Si c es el numero de elementos de Λ , los valores propios restantes son las $M - c$ raíces reales de $S(\lambda) = 0$, con los correspondientes vectores propios izquierdos y derechos, l y r , dados por

$$l_i = \frac{1}{u_i - \lambda}, \quad r_i = \frac{a_i}{u_i - \lambda}.$$

En efecto, sea λ el valor propio de $J := J_\rho f$ asociado al vector propio a derecha r , es decir,

$$Jr = \lambda r$$

entonces, teniendo en cuenta que $J = D + ab^\top$, resulta

$$(D - \lambda I)r + a(b^\top r) = 0.$$

Si $\lambda \neq u_i$ para cada $i = 1, \dots, M$, se sigue que

$$r + (D - \lambda I)^{-1}a\xi = 0, \quad \text{con } \xi = b^\top r. \quad (2.2.1)$$

Si multiplicamos por b^\top , obtenemos,

$$b^\top r + (b^\top (D - \lambda I)^{-1}a)\xi = 0,$$

$$(I + b^\top (D - \lambda I)^{-1}a)\xi = 0,$$

$$\left(1 + \sum_{i=1}^M \frac{a_i b_i}{u_i - \lambda}\right) \xi = S(\lambda)\xi = 0.$$

Puesto que $\xi \neq 0$, resulta, $S(\lambda) = 0$. Sin pérdida de generalidad, tomemos $\xi = -1$, se obtiene así

$$r = (D - \lambda I)^{-1}a = \left(\frac{a_1}{u_1 - \lambda}, \dots, \frac{a_M}{u_M - \lambda}\right)^\top.$$

Luego,

$$\mathbf{r}_i = \frac{a_i}{u_i - \lambda}, \quad i = 1, \dots, M$$

Por otra parte es fácil ver que los vectores propios a izquierda de $\mathbf{J} = \mathbf{D} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top$ son los vectores propios a derecha de $\mathbf{D} + \mathbf{b}\mathbf{a}^\top$. En efecto, suponga que \mathbf{l} es un vector propio a izquierda de \mathbf{J} asociado al valor propio λ , es decir,

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{J} = \lambda \mathbf{l}^\top,$$

$$\mathbf{l}^\top (\mathbf{D} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top) = \lambda \mathbf{l}^\top,$$

entonces

$$(\mathbf{D} + \mathbf{b}\mathbf{a}^\top)\mathbf{l} = \lambda \mathbf{l}.$$

Así procediendo como se hizo arriba para \mathbf{r} resulta

$$\mathbf{l} = (\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{b} = \left(\frac{1}{u_1 - \lambda}, \dots, \frac{1}{u_M - \lambda} \right)^\top,$$

esto es,

$$l_i = \frac{1}{u_i - \lambda}, \quad i = 1, \dots, M$$

Si $\rho_q = 0$ para algún $q \in \{1, \dots, M\}$, entonces $a_q = 0$. Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_q^\top \mathbf{J} &= \mathbf{e}_q^\top \mathbf{D} + \mathbf{e}_q^\top \mathbf{a}\mathbf{b}^\top & (\mathbf{e}_q^\top &:= (0, \dots, 1, \dots, 0)) \\ &= u_q \mathbf{e}_q^\top + a_q \mathbf{b}^\top \\ &= u_q \mathbf{e}_q^\top, \end{aligned}$$

es decir, $\mathbf{l} = \mathbf{e}_q^\top$ es un vector propio a izquierda de \mathbf{J} con valor propio asociado $\lambda = u_q$.

Para el cálculo del vector propio a derecha asociado con u_q se procede así:

$$\mathbf{J}\mathbf{r} = u_q \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{D} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top)\mathbf{r} = u_q\mathbf{r},$$

$$(\mathbf{D} - u_q\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top)\mathbf{r} = 0.$$

Entonces

$$(u_i - u_q)r_i + a_i(\mathbf{b}^\top\mathbf{r}) = 0, \quad i = 1, \dots, M.$$

Para $q \neq i$

$$r_i + \frac{a_i}{(u_i - u_q)}\xi = 0 \quad \text{con} \quad \xi = \mathbf{b}^\top\mathbf{r}. \quad (2.2.2)$$

Con el objeto de que los vectores estén normalizados se impone la condición

$$r_q = \mathbf{e}_q^\top\mathbf{r} = 1.$$

Por ende, de (2.2.2)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ q \neq i}}^M r_i + \sum_{\substack{i=1 \\ q \neq i}}^M \frac{a_i}{u_i - u_q} \xi = 0$$

y con eso

$$(\xi - r_q) + \sum_{\substack{i=1 \\ q \neq i}}^M \frac{a_i}{u_i - u_q} \xi = (\xi - 1) + \sum_{\substack{i=1 \\ q \neq i}}^M \frac{a_i}{u_i - u_q} \xi = 0.$$

En consecuencia

$$\left(1 + \sum_{\substack{i=1 \\ q \neq i}}^M \frac{a_i}{u_i - u_q}\right) \xi = 1.$$

Por lo tanto

$$S(u_q)\xi = 1.$$

De eso se sigue que

$$S(u_q) \neq 0, \quad \xi = \frac{1}{S(u_q)}$$

y en consecuencia

$$r_i = \frac{a_i}{S(u_q)(u_q - u_i)}.$$

Esquemas numéricos

3.1. Aproximación WENO.

En 1987 Harten, Engquist, Osher y Chakravarthy [18] introdujeron los esquemas de alto orden ENO (Essentially Non Oscillatory). Estos esquemas han sido ampliamente usados para hallar la solución numérica de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación, las cuales se caracterizan por la presencia de discontinuidades (choques). La idea general del método es hacer una reconstrucción de una función a partir de sus promedios de celda utilizando polinomios a trozos pero usando un procedimiento adaptativo en la selección de los estencil (conjunto de puntos usados en la interpolación) para evitar en lo posible incluir celdas donde se presentan discontinuidades. Posteriormente y con el objetivo de suplir algunas desventajas del método ENO, Liu, Osher y Chan [24] y Jiang, Shu [21] se basaron en este método para desarrollar una extensión conocido como el método WENO (Weighted essentially nonoscillatory). Dicho método se basa en el uso de combinaciones convexas ponderadas de las reconstrucciones de los posibles polinomios asociados a cada estencil. Esta ponderación se asigna de modo que en las regiones suaves se obtenga un mayor orden de precisión, mientras que cerca

de las discontinuidades los respectivos pesos reciben valores pequeños.

La ecuación (1.0.1) será aproximada con el esquema semidiscreto

$$\frac{d\rho_j(t)}{dt} = -\frac{1}{h}(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}), \quad (3.1.1)$$

donde $\rho_j(t)$ denota la aproximación numérica de $\rho(x_j, t)$, h es el tamaño de la celda con centro en x_j y el flujo numérico $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ es obtenido por el método WENO de quinto orden (WENO-5) (ver referencias [21, 28]) como se indica enseguida. El lado derecho de la ecuación (3.1.1), el cual denotaremos como $\mathcal{L}(\rho(t))$, es una aproximación de la derivada espacial $\partial_x f(\rho)$. Dada la no linealidad del modelo y teniendo en cuenta que los valores propios de la matriz Jacobiana no tienen necesariamente el mismo signo, entonces para garantizar que la información característica se propague en la dirección correcta se requiere dividir el flujo en sus partes positiva y negativa, es decir, $f(\rho) = f^+(\rho) + f^-(\rho)$. Emplearemos la partición de flujo de Lax-Friedrichs $f^\pm(\rho) := \frac{1}{2}(f(\rho) \pm \alpha\rho)$. Aquí, el coeficiente de viscosidad α se toma como

$$\alpha = \max_j \max_{1 \leq i \leq M} |\lambda_i(\rho_{j+\frac{1}{2}})|, \quad (3.1.2)$$

donde $\rho_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\rho_j + \rho_{j+1})$ y $\lambda_i(\rho_{j+\frac{1}{2}})$ son los valores propios de la matriz Jacobiana $J_\rho f(\rho_{j+\frac{1}{2}})$. Puesto que se pretende implementar una versión espectral de WENO-5, también tenemos que calcular los vectores propios (normalizados) a izquierda $l_{j+\frac{1}{2}, i}$ y los vectores propios a derecha $r_{j+\frac{1}{2}, i}$, $i = 1, \dots, M$ de $J_\rho f(\rho_{j+\frac{1}{2}})$, el subíndice $(j + \frac{1}{2}, i)$ indica el i -ésimo vector propio en la interfaz $j + \frac{1}{2}$. Esto se logra mediante el uso del Teorema 1.0.1. Sea $R_{j+\frac{1}{2}}$ la matriz cuyas columnas son los vectores propios a derecha, por lo tanto, las filas de la matriz inversa $R_{j+\frac{1}{2}}^{-1}$ son los vectores propios a izquierda. Con esta información, es posible calcular los flujos característicos locales alrededor de la interfaz $x_{j+\frac{1}{2}}$

de la siguiente manera:

$$\mathbf{g}_{j+m}^+ = \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}^{-1} \mathbf{f}^+(\rho_{j+m}) \quad \text{y} \quad \mathbf{g}_{j+m+1}^- = \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}^{-1} \mathbf{f}^-(\rho_{j+m+1}),$$

para $m = -2, -1, 0, 1, 2$. Estos flujos se utilizan para construir los indicadores de regularidad \mathbf{IS}_p^+ y \mathbf{IS}_p^- para $p = 0, 1, 2$, esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{IS}_{0,i}^+ &= \frac{13}{12}(\mathbf{g}_{j-2,i}^+ - 2\mathbf{g}_{j-1,i}^+ + \mathbf{g}_{j,i}^+)^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{g}_{j-2,i}^+ - 4\mathbf{g}_{j-1,i}^+ + 3\mathbf{g}_{j,i}^+)^2, \\ \mathbf{IS}_{1,i}^+ &= \frac{13}{12}(\mathbf{g}_{j-1,i}^+ - 2\mathbf{g}_{j,i}^+ + \mathbf{g}_{j+1,i}^+)^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{g}_{j-1,i}^+ - \mathbf{g}_{j+1,i}^+)^2, \\ \mathbf{IS}_{2,i}^+ &= \frac{13}{12}(\mathbf{g}_{j,i}^+ - 2\mathbf{g}_{j+1,i}^+ + \mathbf{g}_{j+2,i}^+)^2 + \frac{1}{4}(3\mathbf{g}_{j,i}^+ - 4\mathbf{g}_{j+1,i}^+ + \mathbf{g}_{j+2,i}^+)^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{IS}_{0,i}^- &= \frac{13}{12}(\mathbf{g}_{j+1,i}^- - 2\mathbf{g}_{j+2,i}^- + \mathbf{g}_{j+3,i}^-)^2 + \frac{1}{4}(3\mathbf{g}_{j+1,i}^- - 4\mathbf{g}_{j+2,i}^- + \mathbf{g}_{j+3,i}^-)^2, \\ \mathbf{IS}_{1,i}^- &= \frac{13}{12}(\mathbf{g}_{j,i}^- - 2\mathbf{g}_{j+1,i}^- + \mathbf{g}_{j+2,i}^-)^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{g}_{j,i}^- - \mathbf{g}_{j+2,i}^-)^2, \\ \mathbf{IS}_{2,i}^- &= \frac{13}{12}(\mathbf{g}_{j-1,i}^- - 2\mathbf{g}_{j,i}^- + \mathbf{g}_{j+1,i}^-)^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{g}_{j-1,i}^- - 4\mathbf{g}_{j,i}^- + 3\mathbf{g}_{j+1,i}^-)^2. \end{aligned}$$

Observe que cada indicador de suavidad es una cantidad vectorial con M componentes donde M es el número de especies.

A continuación, se utilizan los indicadores de regularidad para calcular los pesos ω_p^+ y ω_p^- para $p = 0, 1, 2$:

$$\omega_{p,i}^+ = \frac{\alpha_{p,i}^+}{\alpha_{0,i}^+ + \alpha_{1,i}^+ + \alpha_{2,i}^+} \quad \text{y} \quad \omega_{p,i}^- = \frac{\alpha_{p,i}^-}{\alpha_{0,i}^- + \alpha_{1,i}^- + \alpha_{2,i}^-}, \quad (3.1.3)$$

para $i = 1, \dots, M$. Donde

$$\alpha_{p,i}^+ = \frac{C_p}{(\delta + \mathbf{IS}_{p,i}^+)^2} \quad \text{y} \quad \alpha_{p,i}^- = \frac{C_p}{(\delta + \mathbf{IS}_{p,i}^-)^2}$$

En este caso, los coeficientes C_p para $p = 0, 1, 2$, son los pesos ideales (Jiang y Shu [21]), a saber, $C_0 = \frac{1}{10}$, $C_1 = \frac{6}{10}$ y $C_2 = \frac{3}{10}$. El parámetro $\delta > 0$ se introdujo

originalmente para evitar que el denominador no sea nulo. Sin embargo, como se señala en [22] la elección de valores grandes de este parámetro δ puede causar oscilaciones, mientras que para valores pequeños puede generar una disminución del orden del método. El valor $\delta = 10^{-6}$ se recomienda en la referencia [22].

Ahora, la i -ésima componente de los flujos numéricos característicos $\hat{\mathbf{g}}_{j+\frac{1}{2}}^+$ y $\hat{\mathbf{g}}_{j+\frac{1}{2}}^-$ se obtiene a partir de los pesos (3.1.3) como se indica enseguida.

$$\begin{aligned}\hat{g}_{j+\frac{1}{2},i}^+ &= \frac{\omega_{0,i}^+}{6}(2g_{j-2,i}^+ - 7g_{j-1,i}^+ + 11g_{j,i}^+) + \frac{\omega_{1,i}^+}{6}(-g_{j-1,i}^+ + 5g_{j,i}^+ + 2g_{j+1,i}^+) \\ &\quad + \frac{\omega_{2,i}^+}{6}(2g_{j,i}^+ + 5g_{j+1,i}^+ - g_{j+2,i}^+)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{g}_{j+\frac{1}{2},i}^- &= \frac{\omega_{0,i}^-}{6}(-g_{j-1,i}^- + 5g_{j,i}^- + 2g_{j+1,i}^-) + \frac{\omega_{1,i}^-}{6}(2g_{j,i}^- + 5g_{j+1,i}^- - g_{j+2,i}^-) \\ &\quad + \frac{\omega_{2,i}^-}{6}(11g_{j+1,i}^- - 7g_{j+2,i}^- + 2g_{j+3,i}^-).\end{aligned}$$

Finalmente, se realiza la reconstrucción de las variables originales mediante el uso de la información espectral

$$\hat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^+ = \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{g}}_{j+\frac{1}{2}}^+ \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^- = \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{g}}_{j+\frac{1}{2}}^-.$$

El flujo numérico se obtiene tomando

$$\hat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}} = \hat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^+ + \hat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^-.$$

La figura 3.1 ilustra los diferentes estenciles asociados a los flujos $\hat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^+$ y $\hat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^-$.

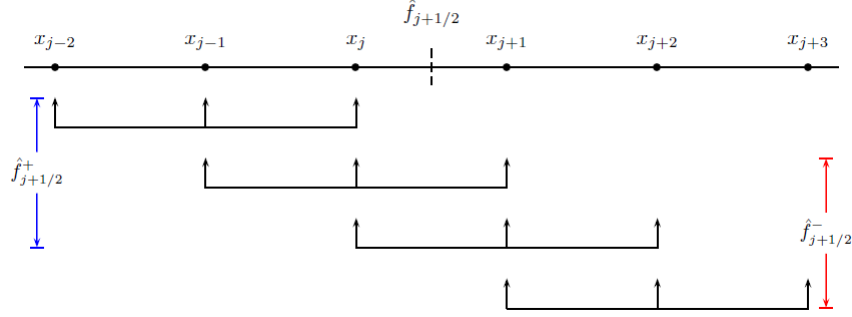


Figura 3.1: Estenciles asociados a los flujos $\hat{f}_{j+1/2}^+$ y $\hat{f}_{j+1/2}^-$

En la referencia [7] los autores implementaron el esquema WENO por componentes junto con multirresolución adaptativa, es decir, sin incluir información característica, en tal caso, la matriz $\mathbf{R}_{j+1/2}$ es reemplazada por la matriz idéntica $M \times M$.

Para resolver la ecuación (3.1.1) manteniendo alto orden en el tiempo con bajos requerimientos de almacenamiento, usamos el popular método de Runge-Kutta que preserva fuertemente la estabilidad de tercer orden y tres etapas (ver referencia [16]), el cual está dada como:

$$\begin{aligned}\rho^{(1)} &= \rho^n + \Delta t \mathcal{L}(\rho^n), \\ \rho^{(2)} &= \frac{3}{4}\rho^n + \frac{1}{4}\rho^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \mathcal{L}(\rho^{(1)}), \\ \rho^{n+1} &= \frac{1}{3}\rho^n + \frac{2}{3}\rho^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \mathcal{L}(\rho^{(2)}),\end{aligned}$$

donde la entrada ρ^n aproxima la solución en $t = t^n = n\Delta t$.

Para que la condición CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) se satisfaga, el paso del tiempo Δt es calculada de forma adaptativa por

$$\Delta t = C_{cfl} * h / \alpha_{\max}^n,$$

donde C_{cfl} es el número de Courant y α_{\max}^n es una estimación de la máxima velocidad característica para ρ^n . Recordemos que la condición CFL es una condición necesaria para la estabilidad del método de diferencias finitas (ver [23] para más detalles) y experiencias numéricas [35] sugieren tomar $C_{cfl} \leq 0,6$. En este trabajo, se usó $C_{cfl} = 0,18$

3.2. Métodos Adaptativos de Multirresolución

Los métodos adaptativos de multirresolución han demostrado ser herramientas muy eficientes para resolver ecuaciones diferenciales parciales, particularmente leyes de conservación hiperbólicas [7, 8, 10, 19, 20]. Estas se basan en la representación de la solución numérica en una malla fina, tomando valores en una malla más gruesa y una serie de diferencias en los diferentes niveles de las mallas diádicas anidadas. Dado que estas diferencias son pequeñas en las regiones donde la solución es suave, pueden ser descartadas en dichas zonas, así podemos obtener una compresión de los datos. Esta característica es especialmente útil para las leyes de conservación donde la solución por lo general exhibe choques en regiones pequeñas pero es suave en la mayor parte del dominio. A continuación, se describe brevemente el algoritmo de multirresolución, para más detalles ver las referencias [7, 8, 12, 16].

Consideremos una familia uniforme de mallas diádicas anidadas $(X^0, X^1, \dots, X^{L_c})$ sobre el intervalo $I := [a, b]$, donde $X^k := (x_0^k, x_1^k, \dots, x_{N_k}^k)$, $N_k = 2^{m-k}$, $m \in \mathbb{N}$, siendo X^0 y X^{L_c} el nivel de resolución más fino y el más grueso respectivamente con $N_0 = 2^m$. Dado que las mallas son uniformes, la longitud de la celda del nivel k es $h_k = (b - a)/N_k$. Los datos de entrada son promedios de celdas $\bar{\rho}_j^0$, $j = 0, 1, \dots, N_0$, de una función $\rho(x)$ sobre las celdas $[x_{j-1}^0, x_j^0]$ del nivel más

fino X^0 . Note que

$$X^{k-1} - X^k = (x_{2j-1}^{k-1})_{j=1}^{N_k}, \quad X^{k-1} \cap X^k = X^k \quad \text{y} \quad x_j^k = x_{2j}^{k-1} \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq N_k.$$

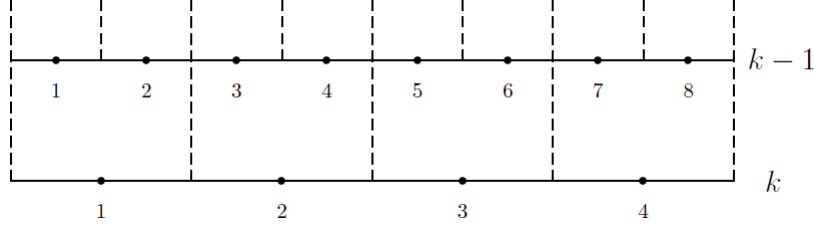


Figura 3.2: Diferentes escalas de promedios de celdas

La representación de ρ en cualquier malla X^k se puede obtener de la malla más fina X^{k-1} por medio de la expresión

$$\rho_j^k = \frac{1}{2}(\rho_{2j-1}^{k-1} + \rho_{2j}^{k-1}), \quad 1 \leq j \leq N_k, \quad 1 \leq k \leq L_c.$$

Con el fin de recuperar la representación de ρ en X^{k-1} a partir de su representación en la siguiente malla más gruesa, se usa la equivalencia existente entre el valor promedio de celda ρ^k y el valor puntual $P_j^k := P(x_j^k)$ de la función primitiva de ρ . Más exactamente, si

$$P(x) = \int_a^x \rho(y) dy,$$

se tiene que

$$P_j^k = h_k \sum_{i=1}^j \rho_i^k \tag{3.2.1}$$

y

$$\rho_j^k = h_k^{-1}(P_j^k - P_{j-1}^k). \tag{3.2.2}$$

Tenga en cuenta que debido a la estructura anidada de las mallas, los valores P_j^k en cualquier malla gruesa X^k puede obtenerse a partir del nivel más fino X^{k-1}

por

$$\mathbf{P}_j^k = \mathbf{P}_{2j}^{k-1}, \quad 0 \leq j \leq N_k. \quad (3.2.3)$$

Ahora, para recuperar los valores \mathbf{P}_j^{k-1} sobre la malla X^{k-1} a partir de los valores de la malla X^k , se usa primero la relación (3.2.3) con el fin de obtener \mathbf{P}_{2j}^{k-1} . Los valores restantes \mathbf{P}_{2j-1}^{k-1} en x_{2j-1}^{k-1} para $1 \leq j \leq N_k$ se aproximan mediante el uso de polinomios interpoladores de $(r-1)$ -ésimo grado en los puntos $(\mathbf{P}_{j-s}^k, \dots, \mathbf{P}_{j+s-1}^k)$

$$\mathbf{P}_{2j-1}^{k-1} \approx \tilde{\mathbf{P}}_{2j-1}^{k-1} := \mathcal{I}(x_{2j-1}^{k-1}, \mathbf{P}^k) = \sum_{m=j-s}^{j+s-1} \mathbf{P}_m^k L_m(x), \quad (3.2.4)$$

donde $r = 2s$. A lo largo de este trabajo, sólo tenemos en cuenta la interpolación de orden tres ($r = 4, s = 2$), para la cual vamos a utilizar el polinomio interpolador de Lagrange, esto es,

$$\mathcal{I}(x_{2j-1}^{k-1}, \mathbf{P}^k) = \sum_{m=j-2}^{j+1} \mathbf{P}_m^k \prod_{\substack{q=j-2 \\ q \neq m}}^{j+1} \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_q^k}{x_m^k - x_q^k}. \quad (3.2.5)$$

Así,

$$L_m(x_{2j-1}^{k-1}) = \prod_{\substack{q=j-2 \\ q \neq m}}^{j+1} \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_q^k}{x_m^k - x_q^k}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} L_{j-2}(x_{2j-1}^{k-1}) &= \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-1}^k}{x_{j-2}^k - x_{j-1}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_j^k}{x_{j-2}^k - x_j^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j+1}^k}{x_{j-2}^k - x_{j+1}^k} \\ &= \frac{\frac{h_k}{2}}{-h_k} \cdot \frac{\frac{-h_k}{2}}{-2h_k} \cdot \frac{\frac{-3h_k}{2}}{-3h_k} = -\frac{1}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{j-1}(x_{2j-1}^{k-1}) &= \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-1}^k}{x_{j-2}^k - x_{j-1}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_j^k}{x_{j-2}^k - x_j^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j+1}^k}{x_{j-2}^k - x_{j+1}^k} \\ &= \frac{\frac{3h_k}{2}}{h_k} \cdot \frac{\frac{-h_k}{2}}{2h_k} \cdot \frac{\frac{-3h_k}{2}}{-2h_k} = \frac{9}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_j(x_{2j-1}^{k-1}) &= \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-1}^k}{x_j^k - x_{j-1}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-2}^k}{x_j^k - x_{j-2}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j+1}^k}{x_j^k - x_{j+1}^k} \\ &= \frac{\frac{h_k}{2}}{h_k} \cdot \frac{\frac{3h_k}{2}}{2h_k} \cdot \frac{\frac{-3h_k}{2}}{-h_k} = \frac{9}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{j+1}(x_{2j-1}^{k-1}) &= \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-2}^k}{x_{j+1}^k - x_{j-2}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-1}^k}{x_{j+1}^k - x_{j-1}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_j^k}{x_{j+1}^k - x_j^k} \\ &= \frac{\frac{3h_k}{2}}{3h_k} \cdot \frac{\frac{h_k}{2}}{2h_k} \cdot \frac{\frac{-h_k}{2}}{h_k} = -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

De esta forma se obtiene,

$$\mathcal{I}(x_{2j-1}^{k-1}, \mathbf{P}^k) = \frac{1}{16}(-\mathbf{P}_{j-2}^k + 9\mathbf{P}_{j-1}^k + 9\mathbf{P}_j^k - \mathbf{P}_{j+1}^k), \quad \text{para } j = 2, \dots, N_k - 1. \quad (3.2.6)$$

Para el caso $j = 1$ y $j = N_k$ hay que usar puntos fuera del dominio, por ello es necesario considerar otro conjunto de nodos de tal forma que los puntos usados para interpolar queden dentro del dominio, así para $j = 1$ se toman los puntos $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ y \mathbf{P}_3 y para $j = N_k$ se toman los puntos $\mathbf{P}_{N_k}, \mathbf{P}_{N_k-1}, \mathbf{P}_{N_k-2}$ y \mathbf{P}_{N_k-3} . Para estos dos casos procediendo como se hizo arriba obtenemos

$$\mathcal{I}(x_1^{k-1}, \mathbf{P}^k) = \frac{1}{16}(5\mathbf{P}_0^k + 15\mathbf{P}_1^k - 5\mathbf{P}_2^k + \mathbf{P}_3^k) \quad (3.2.7)$$

y

$$\mathcal{I}(x_{2N_k-1}^{k-1}, \mathbf{P}^k) = \frac{1}{16}(\mathbf{P}_{N_k-3}^k - 5\mathbf{P}_{N_k-2}^k + 15\mathbf{P}_{N_k-1}^k + 5\mathbf{P}_{N_k}^k). \quad (3.2.8)$$

Ahora denotemos por \mathbf{d}_j^k los errores de interpolación para los promedios de celdas

$$\mathbf{d}_j^k := \boldsymbol{\rho}_{2j-1}^{k-1} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{2j-1}^{k-1} = \boldsymbol{\rho}_{2j-1}^{k-1} - \frac{\mathcal{I}(x_{2j-1}^{k-1}, \mathbf{P}^k) - \mathbf{P}_{j-1}^k}{h_{k-1}}, \quad 1 \leq j \leq N_k. \quad (3.2.9)$$

Las cantidades \mathbf{d}_j^k son también conocidas como **detalles** o **coeficientes de ondículas**. Los valores en x_{2j-1}^{k-1} se calculan a partir de la función polinomial que interpola los puntos $(\mathbf{P}_{j-s}^k, \dots, \mathbf{P}_{j+s-1}^k)$. Teniendo en cuenta los valores en (3.2.6) y

como $h_{k-1} = \frac{1}{2}h_k$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{2j-1}^{k-1} &= \frac{\mathcal{I}(x_{2j-1}^{k-1}, \mathbf{P}^k) - \mathbf{P}_{j-1}^k}{h_{k-1}} \\
&= \frac{\frac{1}{16}(-\mathbf{P}_{j-2}^k + 9\mathbf{P}_{j-1}^k + 9\mathbf{P}_j^k - \mathbf{P}_{j+1}^k) - \mathbf{P}_{j-1}^k}{h_{k-1}} \\
&= \frac{(\mathbf{P}_j^k - \mathbf{P}_{j-1}^k)}{h_k} + \frac{1}{8} \frac{(\mathbf{P}_{j-1}^k - \mathbf{P}_{j-2}^k)}{h_k} - \frac{1}{8} \frac{(\mathbf{P}_{j+1}^k - \mathbf{P}_j^k)}{h_k} \\
&= \rho_j^k + \frac{1}{8}\rho_{j-1}^k - \frac{1}{8}\rho_{j+1}^k \\
&= \rho_j^k + \frac{1}{8}(\rho_{j-1}^k - \rho_{j+1}^k).
\end{aligned}$$

Luego,

$$d_j^k = \rho_{2j-1}^{k-1} - \rho_j^k - \frac{1}{8}(\rho_{j-1}^k - \rho_{j+1}^k), \quad \text{para } j = 2, \dots, N_k - 1. \quad (3.2.10)$$

De forma análoga se calculan los valores en la frontera para $j = 1$ y $j = N_k$, obteniendo así,

$$d_1^k = \rho_1^{k-1} - \rho_1^k - \frac{1}{8}(3\rho_1^k - 4\rho_2^k + \rho_3^k) \quad (3.2.11)$$

y

$$d_{N_k}^k = \rho_{2N_k-1}^{k-1} - \rho_{N_k}^k - \frac{1}{8}(-\rho_{N_k-2}^k + 4\rho_{N_k-1}^k - 3\rho_{N_k}^k). \quad (3.2.12)$$

De las ecuaciones (3.2.1), (3.2.3) y (3.2.10) tener la información (d^k, ρ^k) con $\rho^k = (\rho_0^k, \rho_1^k, \dots, \rho_{N_k}^k)$ y $d_j^k = (d_{j,1}^k, d_{j,2}^k, \dots, d_{j,N_k}^k)$ es equivalente a conocer ρ^{k-1} . Así, podemos recuperar los promedios de celdas ρ^0 en el nivel más fino a partir de los detalles d^1, d^2, \dots, d^{L_c} y el promedio de celdas ρ^{L_c} en el nivel más grueso. La sucesión $\rho_M := (d^1, d^2, \dots, d^{L_c}, \rho^{L_c})$ se denomina la representación de multirresolución de ρ^0 . Dado que los detalles corresponden a los errores de interpolación que contienen información acerca de la regularidad local de ρ , serán utilizados para la construcción del conjunto de índices (j, k) , que corresponde a las posiciones significativas en el siguiente sentido: si d_j^k son los detalles de la

representación de multirresolución en la malla mas fina de la solución ρ^n en el tiempo t_n , las posiciones significativas para el siguiente paso de tiempo $n + 1$ son los puntos x_j^k para el que $(j, k) \in \mathfrak{D}^n$, donde

$$\mathfrak{D}^n := \{(j, k) : \| \mathbf{d}_j^k \|_\infty > \varepsilon_k\}. \quad (3.2.13)$$

Aquí, $\varepsilon_k = \varepsilon / 2^{L_c - k}$, donde $\varepsilon > 0$ es una tolerancia prescrita (ver [10]) y $\| \mathbf{d}_j^k \|_\infty$ es la norma del máximo del vector \mathbf{d}_j^k . Como se ha mencionado antes las soluciones de las leyes de conservación hiperbólicas desarrollan discontinuidades o choques, por ende, el conjunto de puntos significativos \mathfrak{D}^n debe ser ampliado para incluir los llamados "safety points", dicha extensión se denota por $\tilde{\mathfrak{D}}^n$. En [19], Harten propone el siguiente algoritmo para el cálculo de $\tilde{\mathfrak{D}}^n$:

Algoritmo 3.2.1 Cálculo de $\tilde{\mathfrak{D}}^n$.

1. Defina $\hat{\mu}(j, k) = 0$, $1 \leq j \leq N_k$, $1 \leq k \leq L_c$
2. **for** $k = 1, \dots, L_c$
 - for** $j = 1, \dots, N_k$
 - if** $\| \mathbf{d}_j^k \|_\infty \leq \varepsilon_k$ **then**
 - $\mathbf{d}_j^k(\rho^n) = 0$
 - else**
 - $\hat{\mu}(m, k) = 1$, $m = j - 1, j, j + 1$
 - if** $\| \mathbf{d}_j^k \|_\infty \geq 2^{\bar{p}+1} \varepsilon_k$ **and** $k > 1$ **then**
 - $\hat{\mu}(2j - 1, k - 1) = 1$, $\hat{\mu}(2j, k - 1) = 1$
 - end**
 - end**
 - end**
 - 3. Defina $\tilde{\mathfrak{D}}^n := \{(j, k) | \hat{\mu}(j, k) = 1\}$

Aquí, $\bar{p} \in [1, \bar{r} - 1]$ con $\bar{r} = 2s - 1$. Según [19], el límite superior $(\bar{r} - 1)$ tiene en cuenta la efectividad de la pérdida de regularidad en las etapas finales de la formación del choque.

El conjunto $\tilde{\mathfrak{D}}^n$ se usa para determinar si el flujo numérico se calcula usando un esquema numérico estándar (en este trabajo el esquema WENO-5 espectral) o bien se calcula utilizando interpolación a partir de las mallas más gruesas, este es un aspecto crucial debido que en general, el costo computacional para aproximar numéricamente soluciones de leyes de conservación se concentra en el cálculo de los flujos numéricos, especialmente si se emplea un esquema basado en información característica.

Los detalles o coeficientes de ondículas contienen información acerca de la regularidad local de la solución, además descartar los detalles que sean más pequeños que cierta tolerancia preestablecida implica una compresión de datos. En este sentido el siguiente resultado (ver [19], [26]) justifica la elección de los parámetros usados en el algoritmo (3.2.1) para la construcción del conjunto de índices correspondiente a las posiciones significativas.

Observación 3.2.1 Si la función $u(x)$ en $x = x^*$ posee $p - 1$ derivadas continuas y una discontinuidad de salto en la derivada p -ésima, entonces en los puntos x_j^k cercanos a x^* se tiene

$$\mathbf{d}_j^k(\rho^0) \sim \begin{cases} (h_k)^p [u^{(p)}], & \text{si } 0 \leq p \leq \bar{r}, \\ (h_k)^p u^{(p)}, & \text{si } p > \bar{r}, \end{cases} \quad (3.2.14)$$

donde \bar{r} es el orden de precisión de la aproximación ($\bar{r} = r - 1$), $p \leq 1$ y $[\]$ denota el salto en la discontinuidad.

El objetivo de los esquemas de multirresolución es poder comprimir la mayor cantidad de datos para reducir el costo computacional, para ello se consideran sólo los detalles \mathbf{d}_j^k cuya norma (escalada) es mayor que un valor de comparación dependiente del nivel, éste valor es una tolerancia preestablecida ε_k mencionada en (3.2.13). Esto es, calcular las cantidades

$$\hat{\mathbf{d}}_j^k := \mathbf{tr}_{\varepsilon_k}(\mathbf{d}_j^k) := \begin{cases} 0, & \text{si } \|\mathbf{d}_j^k\|_\infty < \varepsilon_k, \\ \mathbf{d}_j^k, & \text{si } \|\mathbf{d}_j^k\|_\infty \geq \varepsilon_k, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N_k, 1 \leq k \leq L_c,$$

donde tr_{ε_k} es llamado operador de truncamiento.

Finalmente, incorporamos toda la información descritas en este capítulo para el diseño del algoritmo introducido por Harten [19] que por último permite obtener la solución numérica. Dada la solución $\rho^{n,0}$ sobre la malla más fina en $t = n\Delta t$, la solución $\rho^{n+1,0}$ en la malla más fina en $t = (n+1)\Delta t$ es calculado por el siguiente algoritmo.

Algoritmo 3.2.2

1. Calcule el conjunto de puntos significativos $\tilde{\mathfrak{D}}^n := \{(j, k) | \hat{\mu}(j, k) = 1\}$ (ver algoritmo 3.2.1).
2. Construya la representación de multirresolución de $\rho^{n,0}$ y después de descartar los detalles no significativos, recupere la solución en la malla más fina, esta solución se denota $\tilde{\rho}^{n,0}$.
3. Defina $\rho_j \leftarrow \tilde{\rho}_j^{n,0}$, para $j = 1, \dots, N_0$, y use el método de Runge-Kutta para calcular ρ_j^{n+1} . En cada etapa del método de Runge-Kutta calcule $\mathcal{L}(\cdot)$ a partir de los flujos numéricos para todos los niveles, tales flujos se calculan usando WENO-5 si $(j, k) \in \tilde{\mathfrak{D}}^n$ o utilizando interpolación polinomial si (j, k) no es un punto significativo.
4. Defina $\rho_j^{n+1,0} \leftarrow \rho_j^{n+1}$, para $j = 1, \dots, N_0$.

Este procedimiento se repite hasta obtener la solución numérica en el tiempo deseado.

Capítulo 4

Experimentos numéricos

Consideramos el ejemplo estándar presentado en [32, 36] con $N = 9$ clases diferentes de vehículos que se caracterizan por las velocidades máximas dadas por $v_i^{\text{máx}} = (52,5 + 7,5i)$, $i = 1, \dots, 9$. La función $\phi(\boldsymbol{\rho})$ consiste en la ecuación de Drake

$$\phi(\boldsymbol{\rho}) = \exp(-0,5(\boldsymbol{\rho}/\boldsymbol{\rho}^*)^2),$$

donde el parámetro común para todas las clases de usuario $\boldsymbol{\rho}^*$ se toma como 50 veh/km . La frontera del lado izquierdo del dominio no tiene ninguna entrada ($\rho_i = 0$) para todos los tiempos y la frontera del lado derecho es de salida libre. Las condiciones iniciales para la ley de conservación $\partial_t \boldsymbol{\rho} + \partial_x \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = 0$ son

$$\boldsymbol{\rho}(x, 0) = 120p(x)(0.04, 0.08, 0.12, 0.16, 0.2, 0.16, 0.12, 0.08, 0.04)^\top.$$

Aquí,

$$p(x) = \begin{cases} 10x, & \text{si } 0 < x \leq 0,1, \\ 1, & \text{si } 0,1 < x \leq 0,9, \\ -10(x-1), & \text{si } 0,9 < x \leq 1, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

En las figuras 4.1 y 4.2 se muestra el perfil de soluciones numéricas de cada clase y la densidad total en los tiempos $t = 0,005 \text{ h}$, $t = 0,010 \text{ h}$, $t = 0,020 \text{ h}$

y $t = 0,04 h$. Destacamos la ausencia de oscilaciones cerca de discontinuidades gracias al uso de la información característica. Aquí, usamos una tolerancia de $\varepsilon = 10^{-3}$ y tres niveles, es decir, $L_c = 3$ y una malla fina con $N_0 = 2^8$ puntos. También observamos una representación de las posiciones de los puntos importantes (elementos de $\tilde{\mathfrak{D}}^n$) en cada nivel. Note que en zonas en las que las soluciones son suaves no aparecen posiciones significativas en los mejores niveles 1 y 2 lo que significa que en estas zonas las evaluaciones de flujo se desarrollan por interpolación. Por el contrario, podemos ver las concentraciones de elementos de $\tilde{\mathfrak{D}}^n$ en torno a los choques. Esto muestra la capacidad de adaptación de los esquemas de multirresolución donde su esfuerzo computacional se concentran en regiones donde realmente es necesario. En [7] (véase el ejemplo 2) algunas oscilaciones se presentan al comienzo de la parte de la carretera considerada, tal comportamiento se debe a la aplicación del esquema WENO. A pesar de que utilizamos pocos puntos para nuestra malla espacial, no hay oscilaciones considerables en las simulaciones presentadas. Se calculan las soluciones aproximadas para mallas con $N_0 \in \{256, 512, 1024, 2048, 4096\}$ puntos. Dado que no tienen soluciones exactas se usa una solución de referencia con $N_{ref} = 20480$ puntos. El cálculo de los errores se hace de la siguiente manera. Denotemos por $\rho_i^{N_0}(\cdot, t)$ la solución para la i -ésima componente en el tiempo t para una malla con N_0 puntos y $\rho_i^{ref}(\cdot, t)$ la solución de referencia para i -ésima componente. Supongamos además, que $\rho_i^{ref}(\cdot, t)$ es constante a trozos en una malla de anchura $1/N_{ref}$ para un determinado tiempo t y definimos $r := N_{ref}/N_0$, entonces el error en la norma L_1 en la especie i se computa de la siguiente manera

$$e_i = e_i(t) = \|\rho_i^{ref}(\cdot, t) - \rho_i^{N_0}(\cdot, t)\|_1 = \frac{1}{N_{ref}} \sum_{j=1}^{N_{ref}} |\rho_{j,i}^{ref}(t) - \rho_{\lfloor j/r \rfloor, i}^{N_0}(t)|, \quad (4.0.1)$$

para $i = 1, \dots, M$. En la tabla 4.1 se muestra los errores relativos aproximados E_i , $i = 1, \dots, M$ para cada especie en la norma L_1 para los puntos antes mencio-

nados y determinado tiempo, esto es,

$$E_i = \frac{e_i}{\|\rho_i^{ref}\|_1}$$

También se muestra una medida de la eficiencia del algoritmo de multirresolución que está dado por el cociente

$$\mu = \frac{N_0}{|\widetilde{\mathfrak{D}}^{n+1}| + N_0/2^{L_c}}.$$

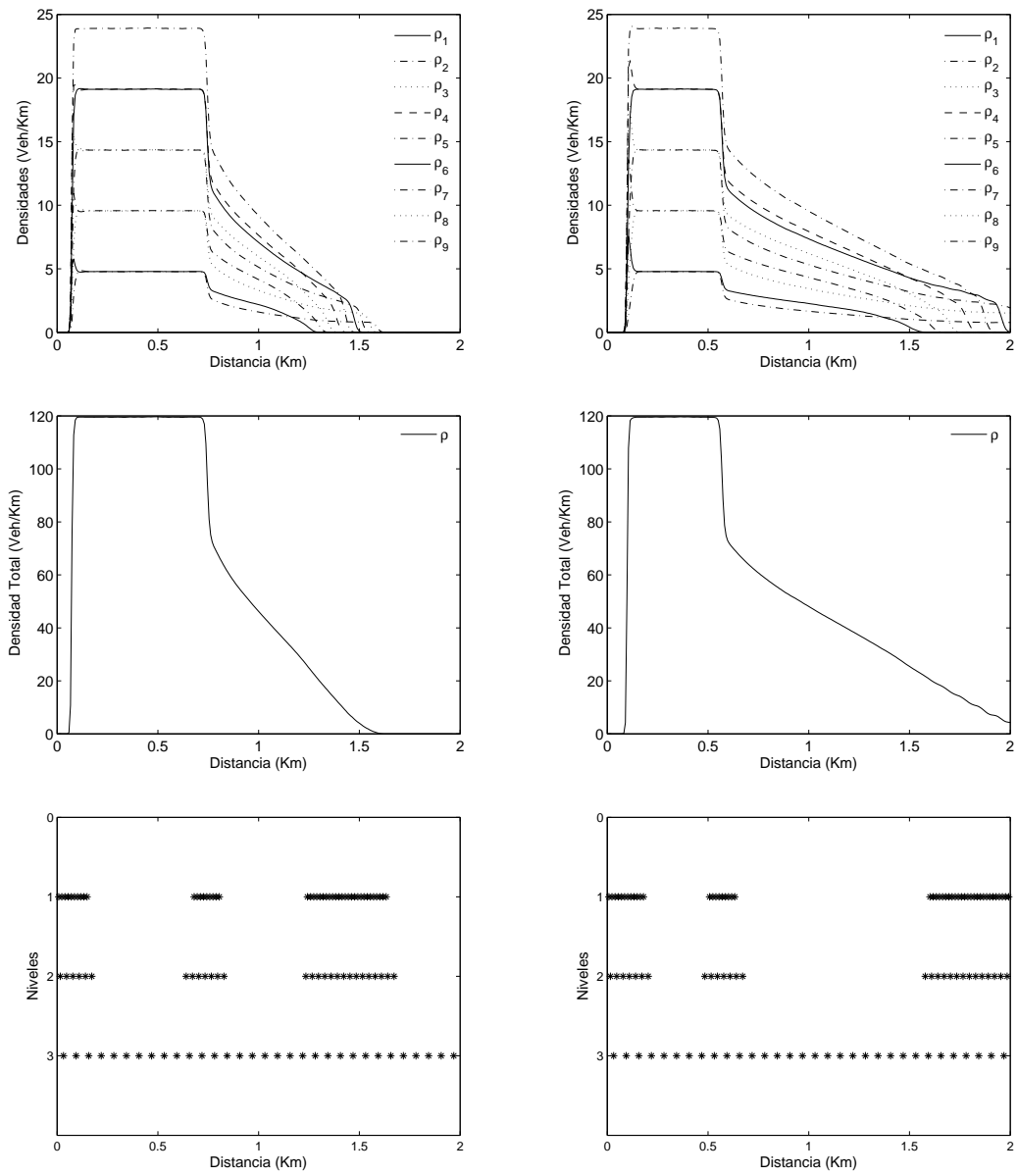


Figura 4.1: La primera y segunda columna muestran la solución numérica para cada especie, la concentración total y los coeficientes significativos para $t=0.005$ y $t=0.010$, respectivamente.

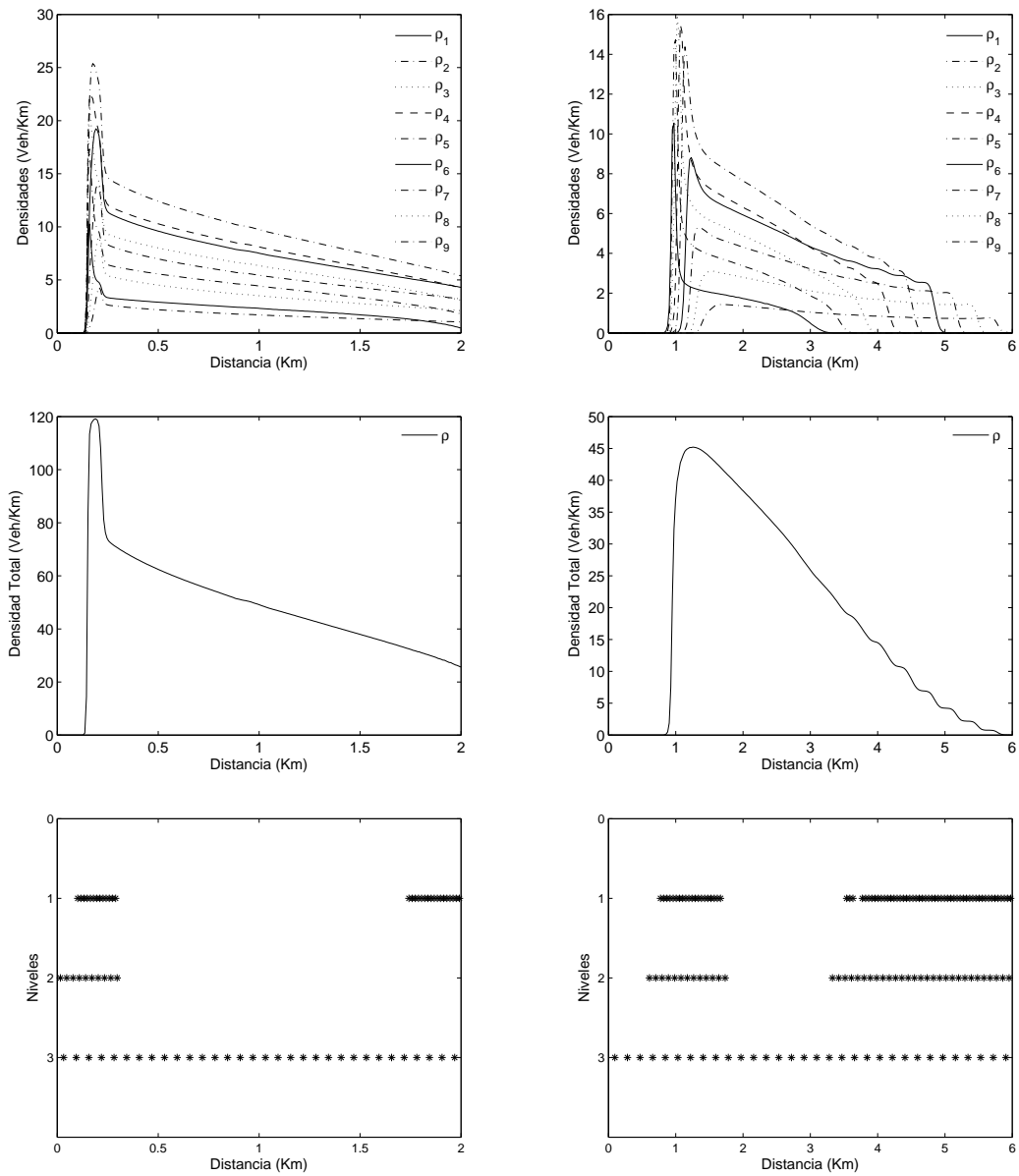


Figura 4.2: La primera y segunda columna muestran la solución numérica para cada especie, la concentración total y los coeficientes significativos para $t=0.020$ y $t=0.04$, respectivamente.

n	μ	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
$t = 0,005$										
256	2.306	0.111	0.110	0.110	0.109	0.109	0.109	0.109	0.108	0.108
512	2.708	0.057	0.056	0.055	0.054	0.053	0.053	0.053	0.053	0.053
1024	2.820	0.040	0.035	0.033	0.030	0.026	0.026	0.026	0.027	0.028
2048	3.282	0.030	0.026	0.022	0.017	0.014	0.013	0.014	0.015	0.015
4096	3.589	0.025	0.019	0.013	0.010	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007
$t = 0,010$										
256	2.115	0.120	0.118	0.114	0.111	0.109	0.109	0.109	0.109	0.110
512	2.461	0.073	0.067	0.063	0.058	0.053	0.052	0.053	0.053	0.053
1024	2.680	0.053	0.047	0.041	0.033	0.028	0.026	0.027	0.028	0.029
2048	3.220	0.044	0.035	0.027	0.020	0.016	0.015	0.015	0.015	0.015
4096	3.577	0.038	0.027	0.017	0.012	0.010	0.009	0.008	0.008	0.007
$t = 0,015$										
256	2.015	0.128	0.122	0.117	0.111	0.109	0.109	0.109	0.109	0.110
512	2.285	0.086	0.079	0.071	0.062	0.053	0.053	0.053	0.054	0.055
1024	2.646	0.071	0.059	0.046	0.036	0.030	0.027	0.028	0.029	0.030
2048	3.362	0.059	0.045	0.032	0.022	0.019	0.017	0.016	0.015	0.016
4096	3.716	0.049	0.033	0.020	0.016	0.012	0.010	0.009	0.008	0.008
$t = 0,020$										
256	1.984	0.147	0.138	0.128	0.117	0.107	0.097	0.086	0.074	0.065
512	2.306	0.103	0.092	0.079	0.065	0.054	0.052	0.051	0.050	0.047
1024	2.782	0.084	0.066	0.052	0.038	0.032	0.028	0.029	0.030	0.030
2048	3.483	0.073	0.054	0.034	0.025	0.021	0.019	0.016	0.015	0.016
4096	3.785	0.061	0.036	0.023	0.018	0.013	0.011	0.009	0.008	0.008
$t = 0,04$										
256	1.446	0.302	0.211	0.151	0.110	0.080	0.062	0.050	0.046	0.049
512	2.015	0.259	0.160	0.108	0.072	0.046	0.036	0.030	0.027	0.029
1024	2.612	0.180	0.095	0.059	0.038	0.024	0.019	0.016	0.016	0.017
2048	3.047	0.090	0.048	0.028	0.019	0.012	0.009	0.008	0.008	0.011
4096	3.521	0.046	0.023	0.014	0.009	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004

Cuadro 4.1: Errores aproximados en la norma L^1 .

Conclusiones

En este trabajo se desarrollaron en forma detallada los cálculos para mostrar la hiperbolicidad del modelo multiclase de tráfico vehicular de Lighthill-Whitham-Richards presentados originalmente en las referencias [2, 11]. Como subproducto del análisis del carácter hiperbólico del modelo se obtiene la información característica necesaria para la implementación de un esquema numérico de alto orden teniendo en cuenta las ventajas que implica el uso de esquemas espectrales en comparación con esquemas por componentes. Más concretamente, se usó el popular esquema WENO de orden cinco combinado con una estrategia adaptativa de multiresolución propuesta por Harten [19]. Se da evidencia numérica de las ventajas al utilizar un esquema de alto orden con información espectral y combinado con el método adaptativo de multiresolución para un problema descrito por un sistema de leyes de conservación hiperbólico.

Bibliografía

- [1] J. Anderson, *A secular equation for the eigenvalues of a diagonal matrix perturbation*, Lin. Alg. Appl., **246** (1996), 49–70.
- [2] S. Benzoni-Gavage and R.-M. Colombo, *An n -populations model for traffic flow*, Eur. J. Appl. Math., **14** (2003), 587–612.
- [3] S. Benzoni-Gavage, R.-M. Colombo and P. Gwiazda, *Measure valued solutions to conservation laws motivated by traffic modelling*, Proc. R. Soc. A., **462** (2006), 1791–1803.
- [4] M.J. Berger and J. Oliger, *Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations*, J. Comput. Phys. **53**, 484–512.
- [5] R. Bürger, R. Donat, P. Mulet and C.-A. Vega, *Hyperbolicity analysis of polydisperse sedimentation models via a secular equation for the flux Jacobian*, SIAM J. Appl. Math., **70** (2010), 2186–2213.
- [6] R. Bürger, K.-H. Karlsen, E.-M. Topy and W.-L. Wendland, *Model equations and instability regions for the sedimentation of polydisperse suspensions of spheres*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., **82** (2002), 699–722.

- [7] R. Bürger and A. Kozakevicius, *Adaptive multiresolution WENO schemes for multi-species kinematic flow models*, J. Comput. Phys., **224** (2007), 1190–1222.
- [8] R. Bürger, A. Kozakevicius, M. Sepúlveda, *Multiresolution schemes for strongly degenerate parabolic equation in one space dimension*, Numer. Meth. Partial Diff. Eqns. Vol. 23 (2007), 706-730.
- [9] R. Bürger, P. Mulet, Luis M. Villada. *A diffusively Corrected Multiclass Lighthill-Whitham-Richards Traffic Model with Anticipation Lengths and Reaction Times*. Adv. Appl. Math. Mech. Vol. 5. 2013. pp. 728-758.
- [10] A. Cohen, S. M. Kaber, S. Müller, M. Postel, *Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws*, Math. Comp. Vol. 88 (2001), 399-443.
- [11] R. Donat and P. Mulet, *A secular equation for the Jacobian matrix of certain multi-species kinematic flow models*, Numer. Methods Partial Differential Equations, **26** (2010), 159–175.
- [12] R. Donat and P. Mulet, *Characteristic-based schemes for multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic models*, J. Sci. Comput., **37** (2008), 233–250.
- [13] U.S. Fjordholm, S. Mishra, E. Tadmor, *Arbitrary high-order essentially non-oscillatory entropy stable schemes for systems of conservation laws*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 50(2), (2012), 544-573.
- [14] U.S. Fjordholm, S. Mishra, E. Tadmor, *ENO reconstruction and ENO interpolation are stable*, *Found. Comput. Math.*, 2012.

- [15] E. Godlewski, P. Arnaudraviart . *Numerical Aproximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer, Applied mathematical sciences 118, 1996.
- [16] S. Gottlieb, D.-I. Ketcheson and C.-W. Shu, *High order strong stability preserving time discretization*, J. Sci. Comput., **38** (2009), 251–289.
- [17] G.-H. Golub, *Some modified matrix eigenvalue problems*, SIAM Rev., **15** (1973), 318–334.
- [18] A. Harten, B. Engquist, S. Osher and S. Chakravarthy, *Uniformly high order essentially non- oscillatory schemes*, III, Journal of Computational Physics, v71 (1987), 231-303.
- [19] A. Harten. *Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 48 (1995), 1305-1342.
- [20] A. Harten. *Multiresolution representation of data: a general framework*. SIAM J. Numer. Anal. Vol. 33 (1996), 1205-1256.
- [21] G.-S. Jiang and C.-W. Shu, *Efficient implementation of weighted ENO schemes*, J. Comput. Phys., **126** (1996), 202–228.
- [22] A.-K. Henrick, T.-D. Aslam and J.-M. Powers, *Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points*, J. Comput. Phys., **207** (2005), 542–567.
- [23] R.-J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2002).
- [24] X.-D. Liu, S. Osher and T. Chan, *Weighted essentially non-oscillatory schemes*, J. Comput. Phys., **115** (1994), 200–212.

- [25] Ramón G. Plaza, Sistemas Hiperbólicos de leyes de conservación [Notas], <http://www.fenomec.unam.mx/ramon/LeyesConservacion-2014-1/Cap2.pdf>.
- [26] R. Ruiz Baier, *Métodos de Multiresolución y su Aplicación a un Modelo de Ingeniería*, Tesis Doctoral. Engrg. (2005).
- [27] C.-W. Shu, Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, ICASE Technical report, NASA, 1997.
- [28] C.-W. Shu, *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*. In: B. Cockburn, C. Johnson, C.-W. Shu and E. Tadmor, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (A. Quarteroni, Ed.), Lecture Notes in Mathematics vol. 1697, Springer-Verlag, Berlin (1998), 325–432.
- [29] C.-W. Shu and S. Osher, *Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes*, J. Comput. Phys., **77** (1988), 439–471.
- [30] Sigal Gottlieb, D. Ketcheson, C. Shu, High Order Strong Stability Preserving Time Discretizations, J Sci Comput. (2009), 251-289
- [31] E. Tadmor, U.S. Fjordholm, S. Mishra, Arbitrarily high order accurate entropy stable essentially non-oscillatory schemes for systems of conservation laws, Dept. of Mathematics, University of Maryland, MD 20742-4015, USA. 2011.
- [32] G.-C.-K. Wong and S.-C.-K. Wong, *A multi-class traffic flow model—an extension of LWR model with heterogeneous drivers*, Transp. Res. A, **36** (2002), 827–841.

-
- [33] P. Zhang, R.-X. Liu, S.-C. Wong and S.-Q. Dai, *Hyperbolicity and kinematic waves of a class of multi-population partial differential equations*, Eur. J. Appl. Math., **17** (2006), 171–200.
- [34] M. Zhang, C.-W. Shu, G.-C.-K. Wong and S.-C. Wong, *A weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model*, J. Comput. Phys., **191** (2003), 639–659.
- [35] P. Zhang, S.-C. Wong and S.-Q. Dai, *A note on the weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model*, Comm. Numer. Meth. Engrg., **25** (2009), 1120–1126.
- [36] P. Zhang, S.-C. Wong and C.-W. Shu, *A weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class traffic flow model on an inhomogeneous highway*, J. Comput. Phys., **212** (2006), 739–756.